수치해석

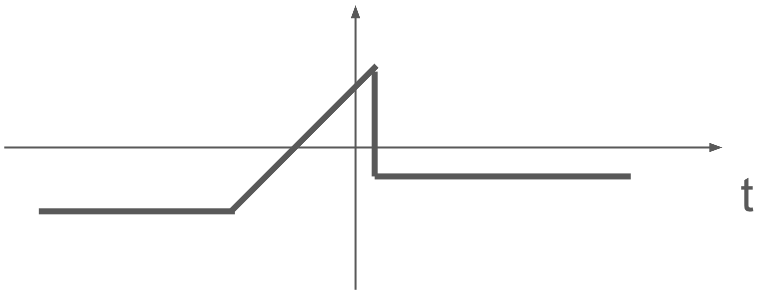
Digital Signal Processing 참고자료

2025.11.26. 한양대 가상현실 연구실 윤준영

신호의 표현

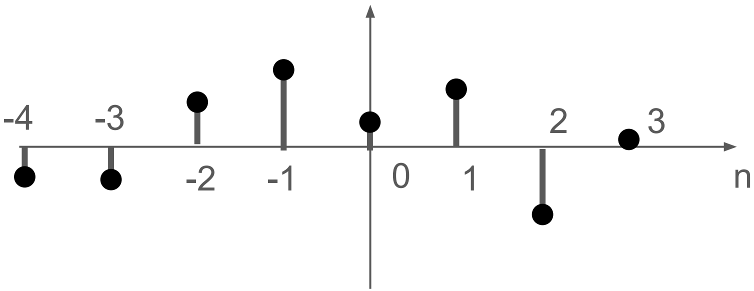
연속신호 (Continuous signal)

$$y(t) = H\{x(t)\}$$



불연속신호 (Discontinuous signal)

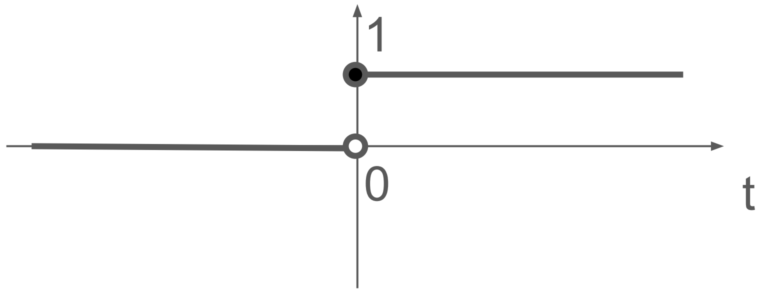
$$y[n] = H\{x[n]\}$$



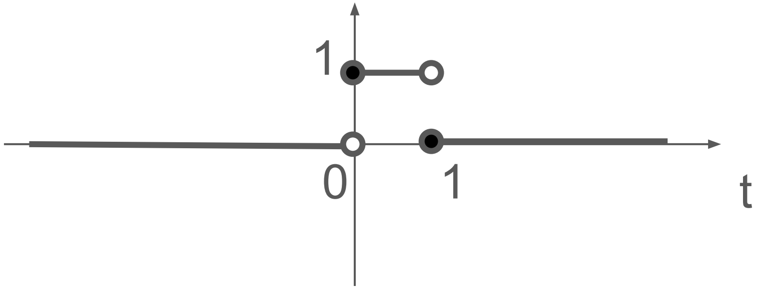
여러가지 신호

Unit step function

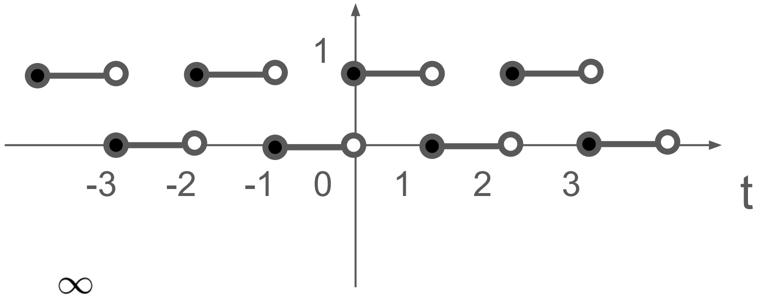
$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0, \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$



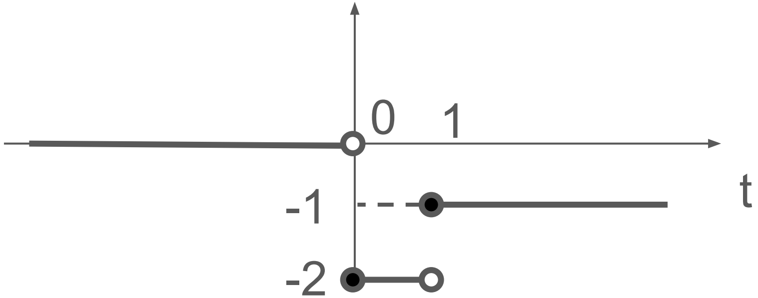
여러가지 신호



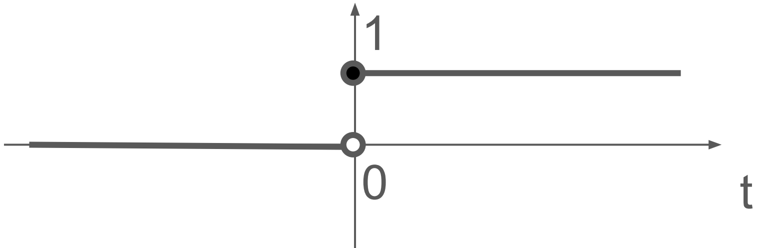
$$u(t) - u(t-1)$$



$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [u(t-k) - u(t-1-k)]$$



$$-2u(t) + u(t-1)$$



$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0, \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$

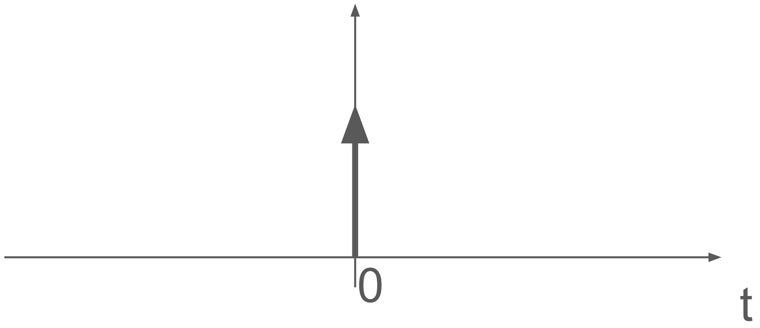
여러가지 신호

Dirac delta function

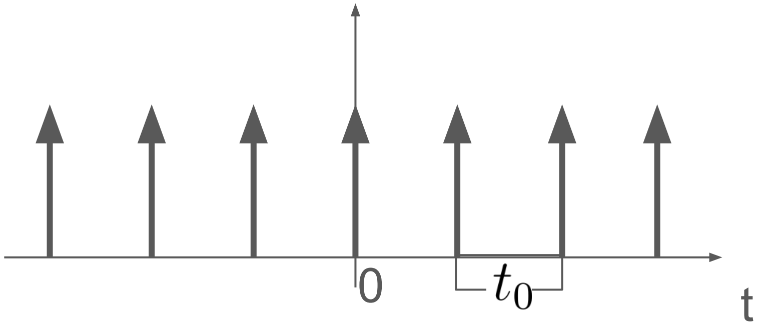
$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0, \\ 0 & t \neq 0. \end{cases}$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t)\, dt = 1$$

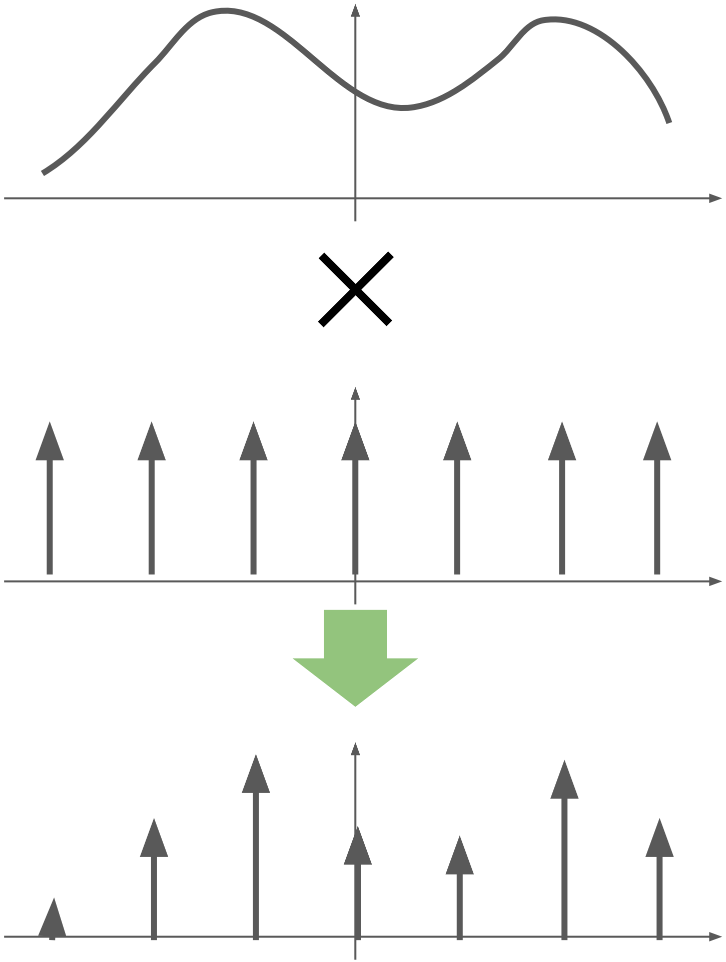
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$



여러가지 신호



$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kt_0)$$



연속신호를 샘플링 하는데 사용 (추후 나올 Sampling Theorem과 연관)

Linear Shift Invariant System (LSI System)

$$y_0(t) = H\{x_0(t)\}$$
$$y_1(t) = H\{x_1(t)\}$$

위에 대하여 다음을 만족하면 linear system 이라 함. (a, b는 임의의 복소수)

$$ay_0(t) + bt_1(t) = H\{ax_0(t) + bx_1(t)\}$$

아래 주어진 시스템은 linear system인가?

$$y(t) = x(t)cos(w_0t)$$

Linear Shift Invariant System (LSI System)

$$y(t) = H\{x(t)\}$$

위에 대하여 다음을 만족하면 shift invariant system 이라 함.

$$y(t - t_0) = H\{x(t - t_0)\}$$

아래 주어진 시스템은 shift invariant system인가?

$$y(t) = x(t)cos(w_0 t)$$

Linear Shift Invariant System (LSI System)

LSI 시스템이 중요한 이유

- LSI시스템을 다루는 수학적 도구가 잘 정립되어 있음. (풀기 쉬운 문제)
    - impulse response, convolution, Fourier transform, sampling theorem 등…
- 자연계의 현상을 선형시스템으로 근사하여 분석할 수 있음.

결론)

1. 어떤 현상을 시스템의 관점으로 다루기 전에 LSI 시스템의 조건을 만족하는지 점검한다.

2. 조건을 만족한다면 LSI system에 대해 잘 정리된 수학적 도구를 사용하여 문제를 푼다.

BIBO (Bounded-input and Bounded-output) Stability

- Definition : bounded input, bounded output

$$if\ |x(m,n)| < \infty, \quad then\ |H[x(m,n)]| < \infty$$

- Stable LSI systems(necessary and sufficient condition)

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(m,n)| < \infty$$

아래 주어진 시스템은 BIBO stability를 만족하는가?

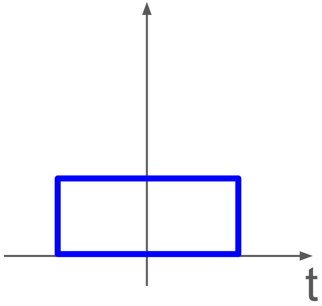
$$y(t) = x(t)cos(w_0 t)$$

신호의 합성곱 (Convolution)

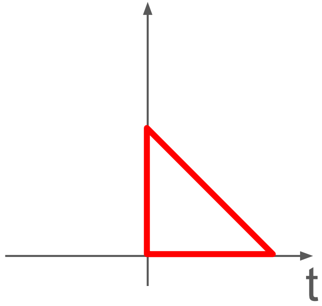
$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$$

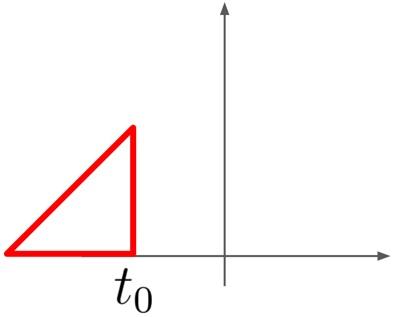
참고:
https://phiresky.github.io/convolution-demo/



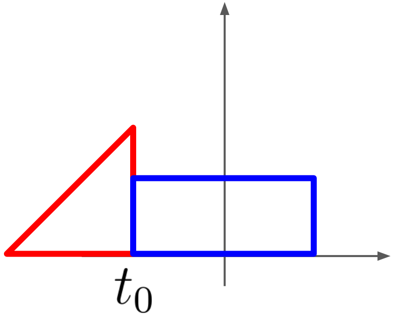
$f(t)$



$g(t)$



$g(t_0 - \tau)$



$f(\tau)g(t_0 - \tau)$

신호의 합성곱 (Convolution)

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

아래 주어진 두 신호의 convolution 결과를 구하시오.

$$f(t) = u(t) - u(t-5)$$

$$g(t) = \delta(t) - \delta(t+1)$$

임펄스 응답 (Impulse Response)과 LSI 시스템

$$y(t) = H\{x(t)\}$$ (연속 신호에 대한 시스템일 경우)

$$y[n] = H\{x[n]\}$$ (불연속 신호에 대한 시스템일 경우)

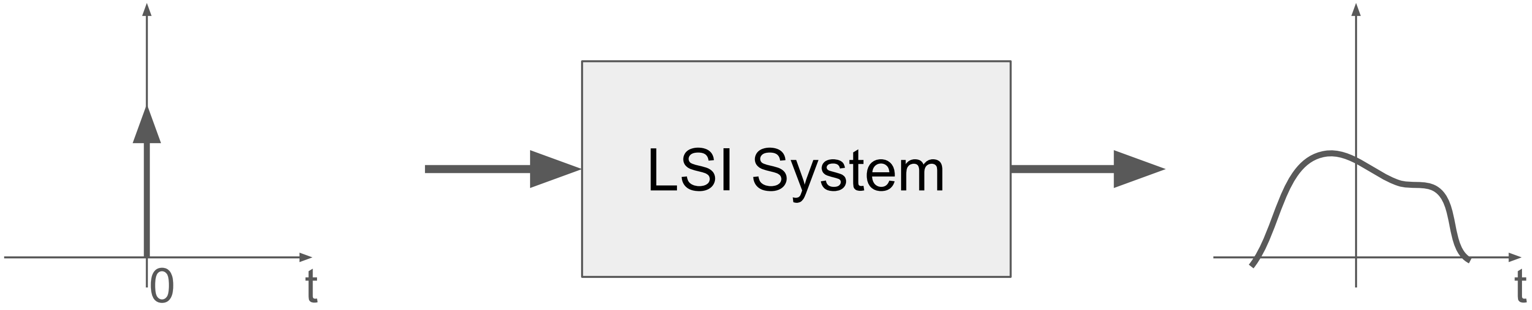
LSI 시스템 H에 대해 임펄스 함수(Dirac delta/Kronecker delta)를

입력으로 주었을때의 결과 h(t)를 임펄스 응답이라고 함.

$$h(t) = H\{\delta(t)\}$$ (연속 신호에 대한 시스템일 경우)

$$h[n] = H\{\delta[n]\}$$ (불연속 신호에 대한 시스템일 경우)

임펄스 응답 (Impulse Response)과 LSI 시스템



$$\delta(t) \qquad y(t) = H\{x(t)\} \qquad h(t)$$

임펄스 응답 (Impulse Response)과 LSI 시스템

모든 LSI 시스템은 impulse response와 input의 convolution으로 정의됨 (역도 성립)

임의의 **LSI 시스템 H**와 시스템의 **임펄스응답 h(t)**에 대해 다음이 성립

$$y(t) = H\{x(t)\}$$

대응쌍이 유일함!

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

임펄스 응답 (Impulse Response)과 LSI 시스템

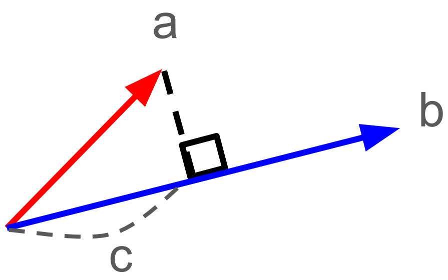
아래 주어진 LSI 시스템의 Impulse Response를 구하시오.

$$y[n] = x[n] + 0.5x[n-1]$$

위 시스템을 convolution을 통해 표현하시오.

벡터공간과 내적

벡터 a에 벡터 b의 성분이 얼마나 있을까? -> 내적



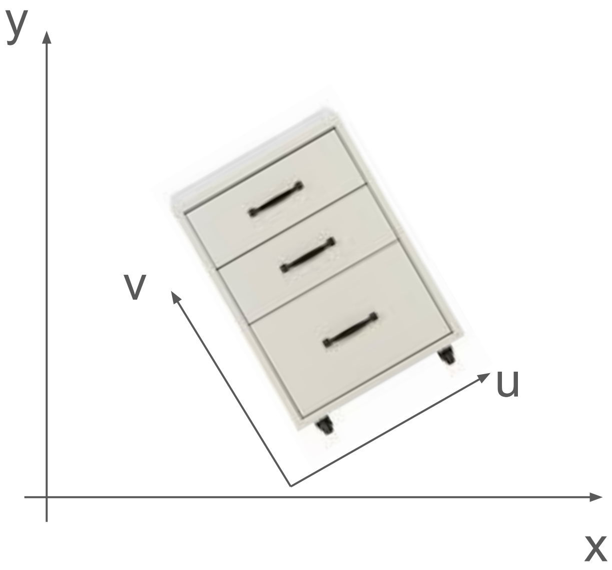
$$a \cdot b = c$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}^\intercal \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_0 & y_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$$= x_0 x_1 + y_0 y_1$$

벡터공간과 내적



$$\begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}$$

Rotation

벡터공간과 내적

함수자체도 벡터가 될 수 있을까? -> Hilbert Space

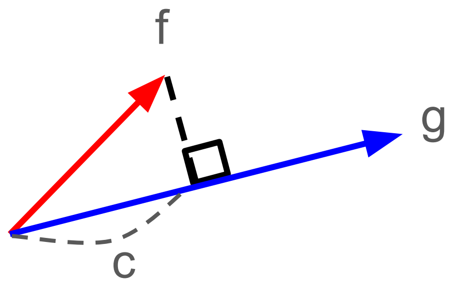
$$\begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(0.5) \\ f(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(0.25) \\ f(0.5) \\ f(0.75) \\ f(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ \dots \\ f(1) \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} f(a) \\ \dots \\ f(b) \end{bmatrix}$$

두 함수의 내적은?

$$\begin{bmatrix} f(a) \\ \dots \\ f(b) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g(a) \\ \dots \\ g(b) \end{bmatrix} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\bar{g}(x)dx$$

벡터공간과 내적

함수 f에 함수 g의 성분이 얼마나 있을까? -> 함수의 내적

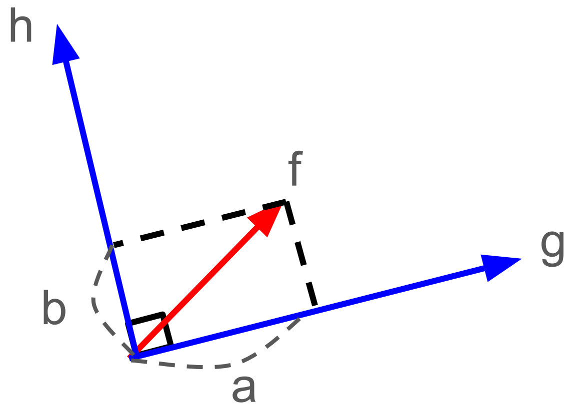


$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\bar{g}(x)dx = c$$

벡터공간과 내적

직교하는 함수들을 기저(basis)로 사용하는 공간을 구성하면?

- 임의의 함수를 기저함수들의 선형결합으로 나타낼 수 있다.



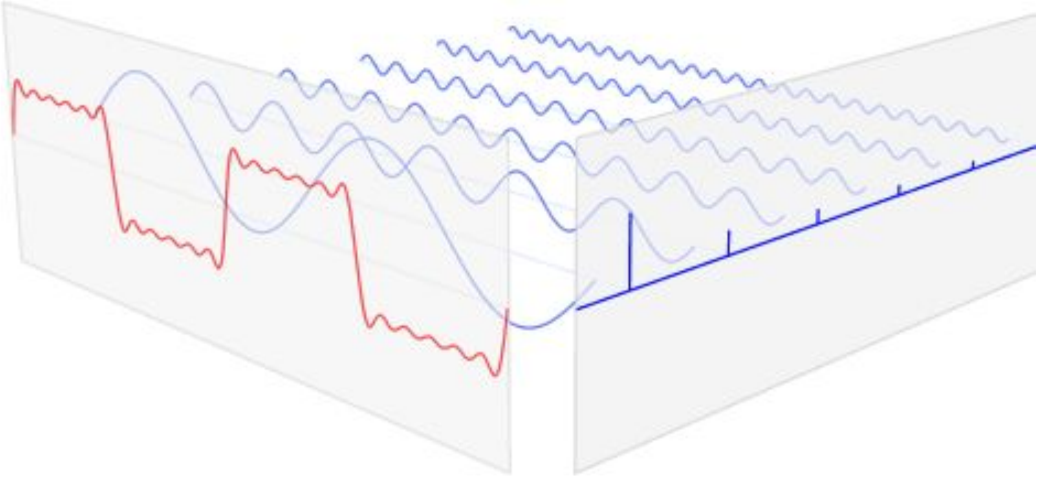
$$f(x) = ag(x) + bh(x)$$

푸리에 해석 (Fourier Analysis)

임의의 신호를 정현파(sin, cos 함수)들의 합으로 표현할 수 있을까? (YES, 증명됨)

주파수가 u인 복소정현파

$$e^{i2\pi ux} = \cos(2\pi ux) + i\sin(2\pi ux)$$



*오일러 공식

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

$$e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$$

푸리에 해석 (Fourier Analysis)

주파수가 u인 복소정현파: $e^{i2\pi ux} = \cos(2\pi ux) + i\sin(2\pi ux)$

함수 f에는 주파수가 u인 복소정현파의 성분이 얼마나 있을까?

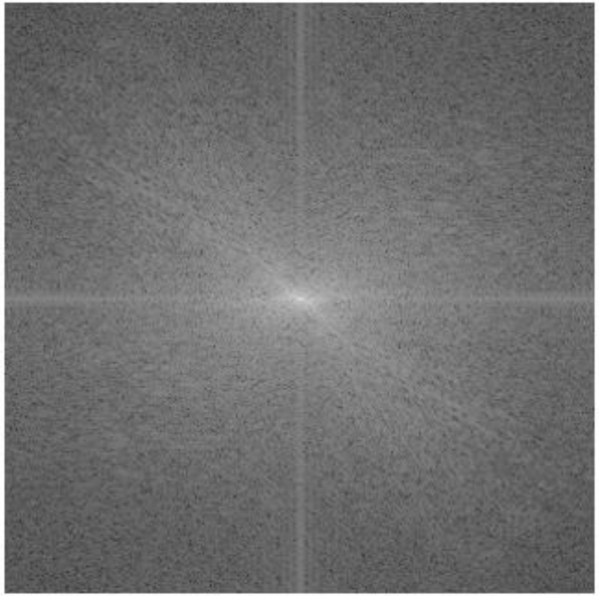
- f와 exp(i2πux)의 내적

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi ux}dx$$

푸리에 변환 (Fourier Transform)

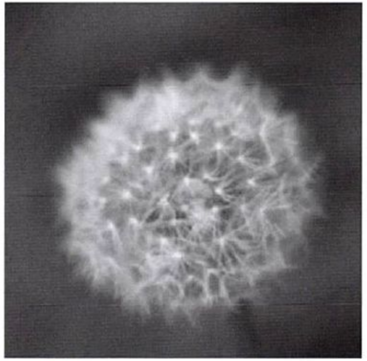
실수 공간에서 정의된 함수를 주파수 공간에서 분석할 수 있는 도구

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{i2\pi ux} du$$



$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi ux} dx$$

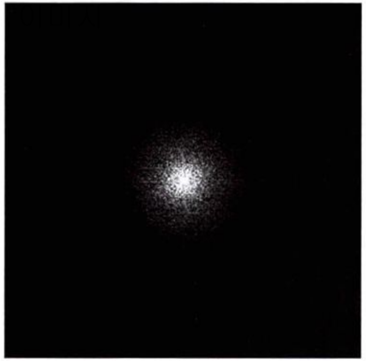
영상의 푸리에 변환



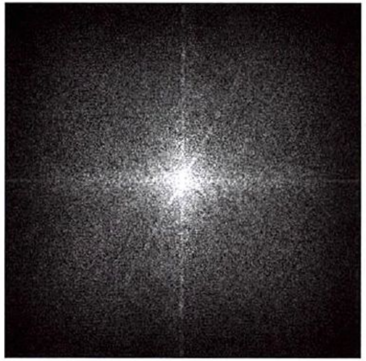
[a]

[b] 이미지

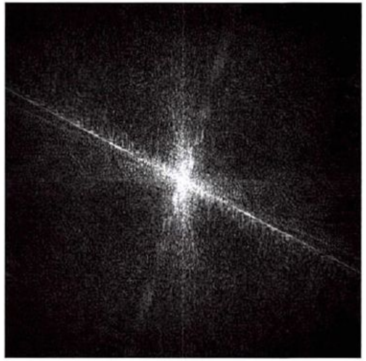
[c] 이미지



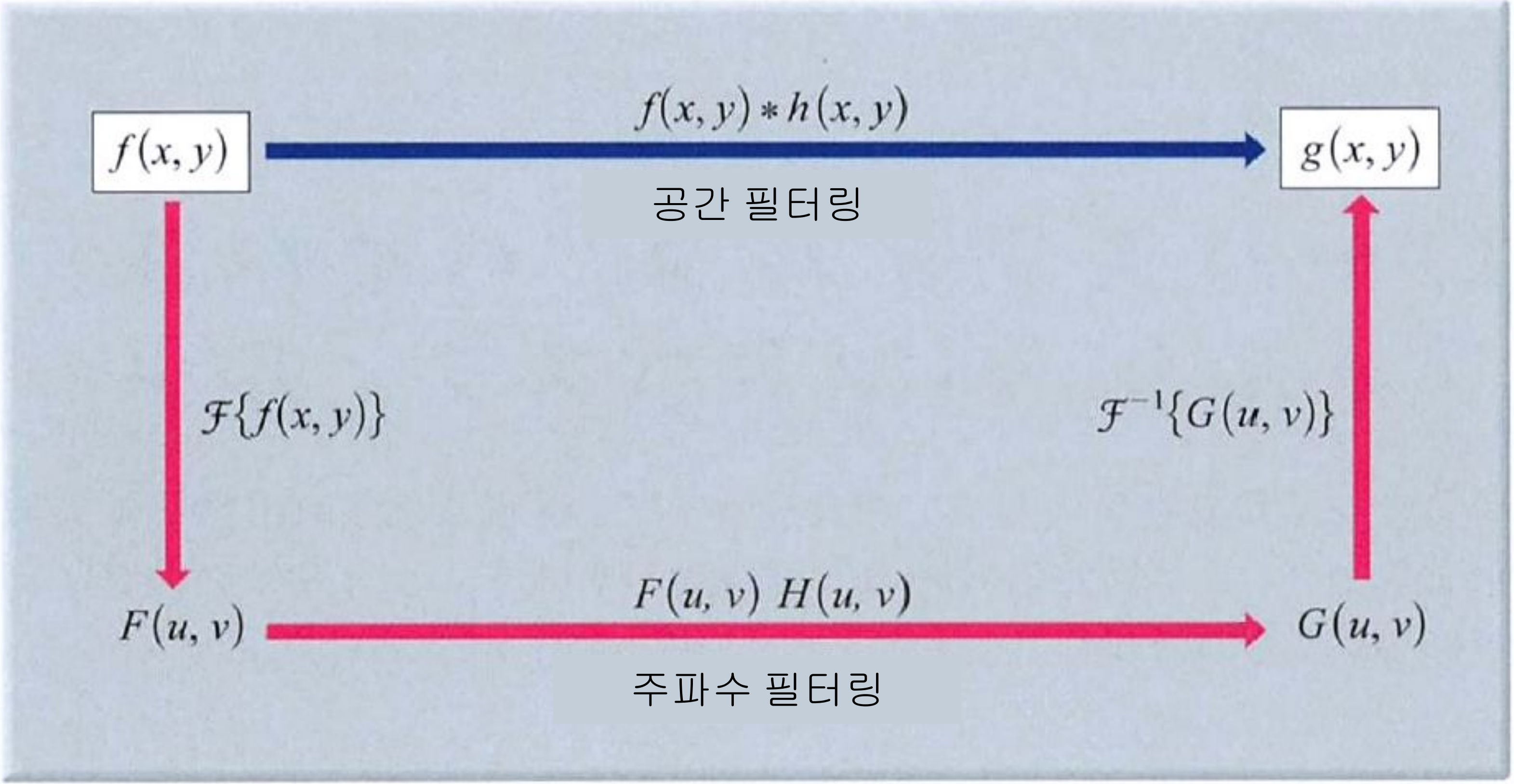
[d] [a]의 진폭 스펙트럼



[e] [b]의 진폭 스펙트럼



[f] [c]의 진폭 스펙트럼



$f(x, y)$
$f(x, y) * h(x, y)$
$g(x, y)$
공간 필터링
$\mathcal{F}\{f(x, y)\}$
$\mathcal{F}^{-1}\{G(u, v)\}$
$F(u, v)$
$F(u, v)\ H(u, v)$
$G(u, v)$
주파수 필터링

6-3-1 LPF


[a] 入力画像

[a] 입력 이미지

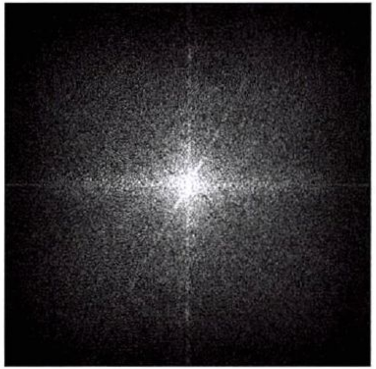
[b] [a]의 진폭 스펙트럼

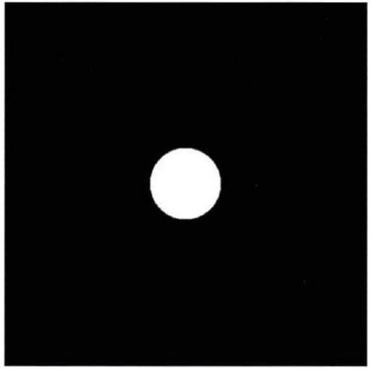
[c] 로우 패스 필터

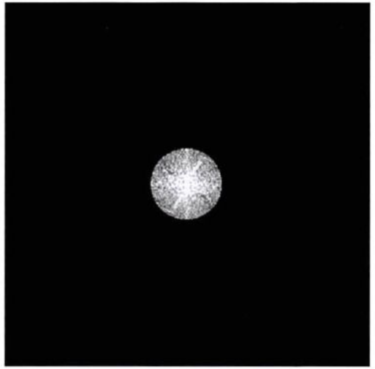
[d] 필터링된 진폭 스펙트럼

[e] 출력 이미지


[e] 出力画像


[b] [a] の振幅スペクトル


[c] ローパスフィルタ


[d] フィルタリング後の振幅スペクトル

로우 패스 필터의 결과: 고주파 성분(edge) 제거 -> 영상흐려짐

6-3-3 HPF

[a] 入力画像

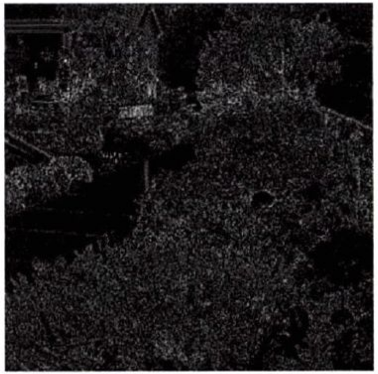
[a] 입력 이미지

[b] [a]의 진폭 스펙트럼

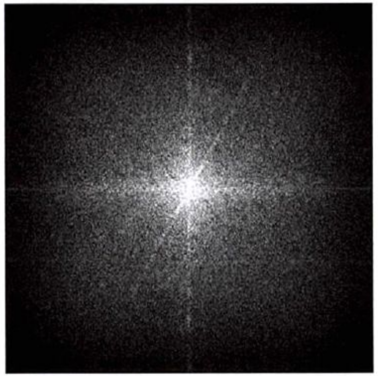
[c] 하이 패스 필터

[d] 필터링된 진폭 스펙트럼

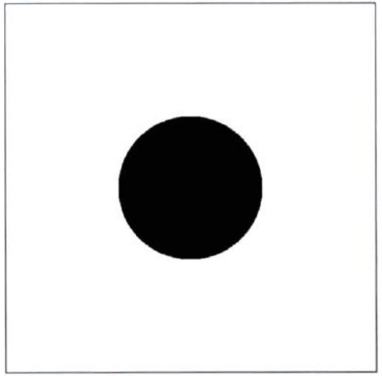
[e] 출력 이미지



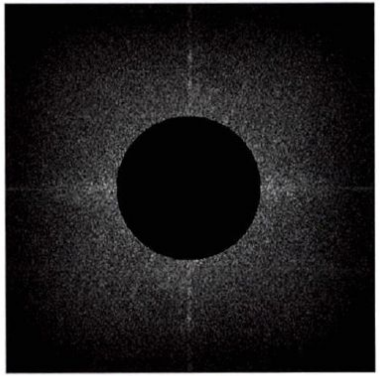
[e] 出力画像



[b] [a] の振幅スペクトル



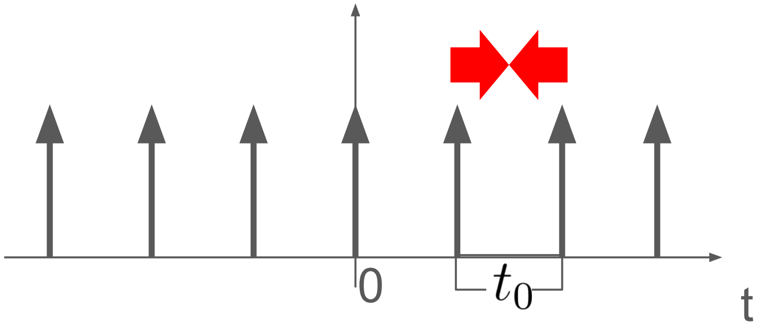
[c] ハイパスフィルタ



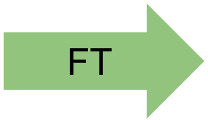
[d] フィルタリング後の振幅スペクトル

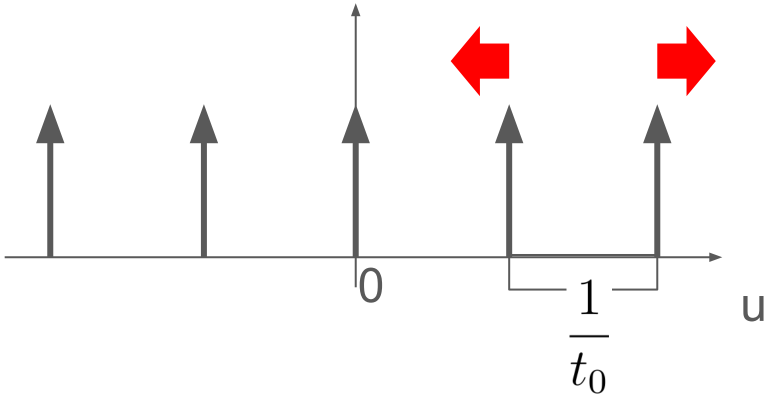
하이 패스 필터의 결과: 영상의 고주파성분 (edge)만 남음

FT of Impulse Train



$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kt_0)$$



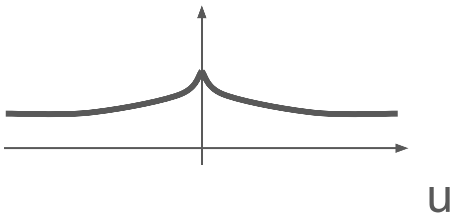


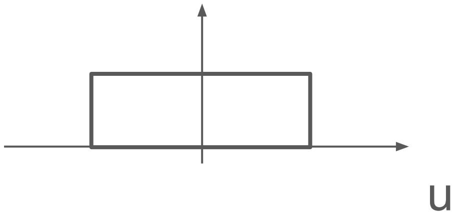
신호의 샘플링과 복원

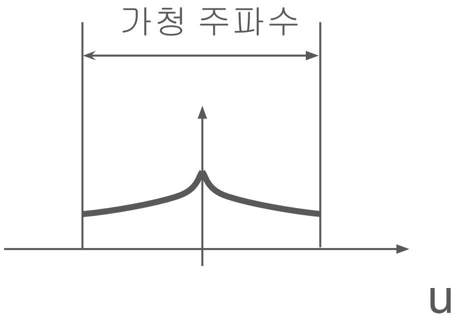
오디오 신호

Low-pass
Filter

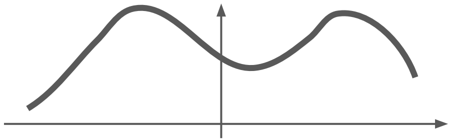
고주파수가 제거된 오디오
신호

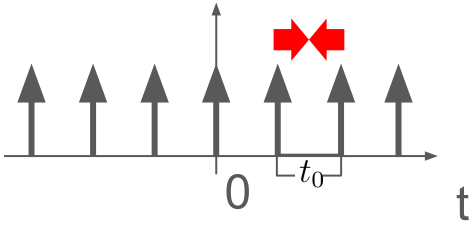


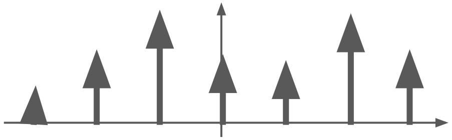




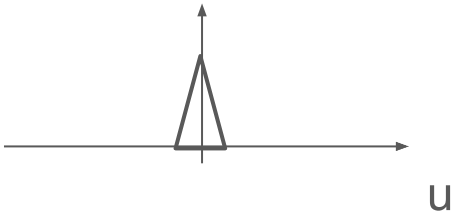
신호의 샘플링과 복원

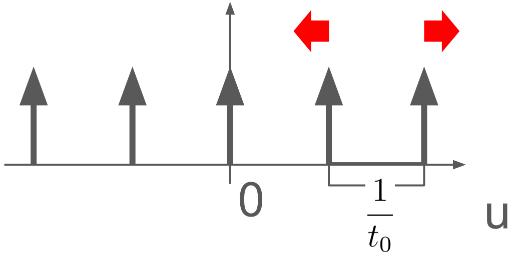


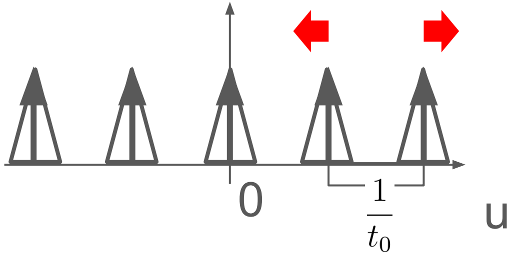




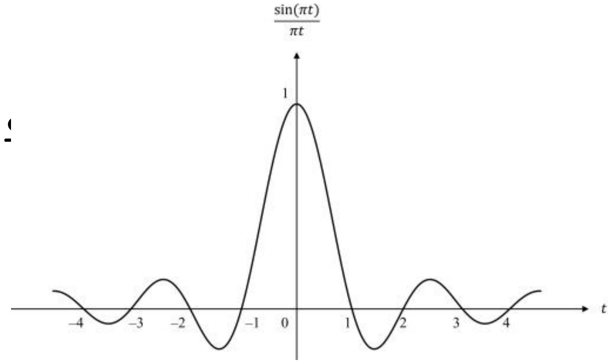
고주파수가 제거된 오디오 신호

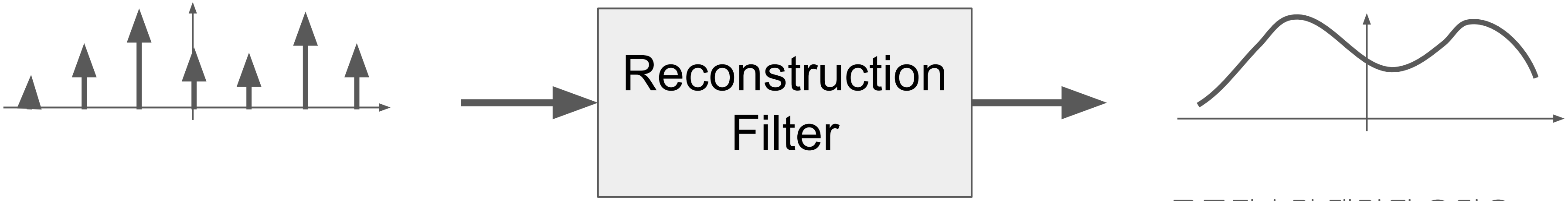




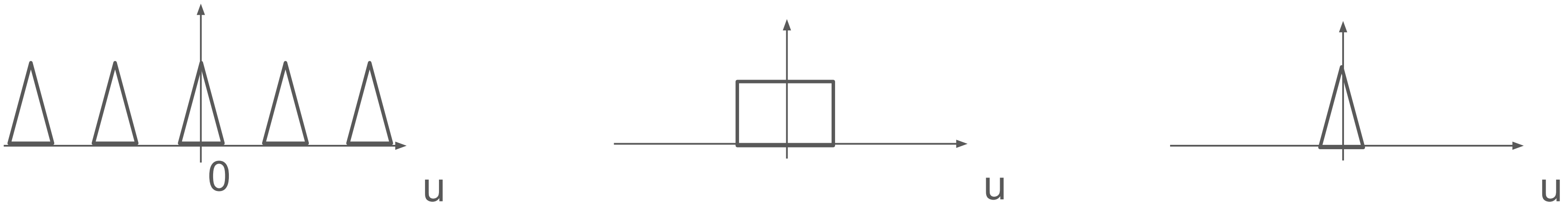


신호의 샘플링과 복

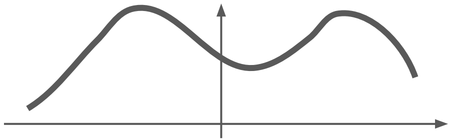


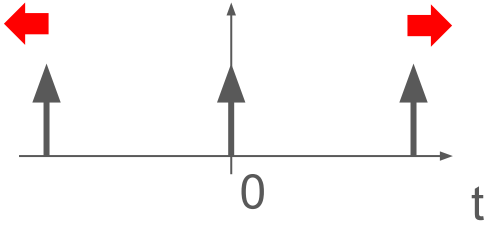


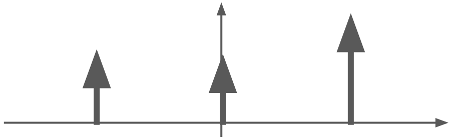
고주파수가 제거된 오디오 신호



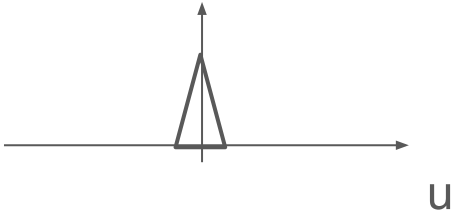
샘플링 주기가 너무 긴 경우

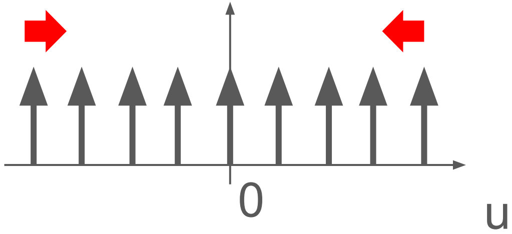


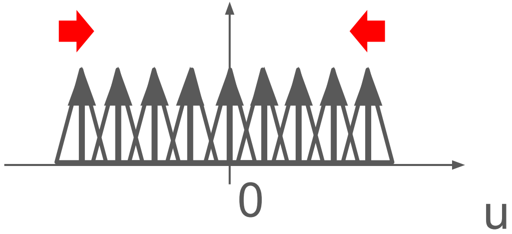




고주파수가 제거된 오디오
신호







Convolution과 FT의 시간복잡도 비교

Convolution (with kernel size m): O(nm)

Convolution (with kernel size m << n): O(n)

Convolution (with kernel size n): O(n^2)

DFT: O(n^2)

FFT: O(nlogn)